Άσκηση 1.

α) Να βρεθεί η τάξη κάθε μιας από τις κάτωθι Σ.Δ.Ε. (Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις) και να εξετασθεί ποιες από αυτές είναι γραμμικές, (όπου $y = y(x)$):

(i) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$, (ii) $y''' - (\sin^3 x)y = \cos^3 x$, (iii) $y^{(iv)} - xy^2 = \cos^4 x$,

(iv) $y^{(iv)} - x^2 y = \cos^4 x$, (v) $x(1-2xy)y' + (1+2xy)y = 0$.

β) Να βρεθεί η γενική λύση στο διάστημα (0, π/2) των εξισώσεων εκείνων που είναι <u>γραμμικές πρώτης τάξης</u>.

γ) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης (v) κάνοντας την αντικατάσταση $u = 2xy$.

Λύση. α) Ως τάξη μιας Σ.Δ.Ε. (~~βλ. και σελ. 9 του βιβλίου «Γενικά Μαθηματικά ΙΙ – Διαφορικές Εξισώσεις Ι», Τόμος Β΄~~), ονομάζουμε την τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση:

(i) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$, είναι πρώτης τάξης γιατί εμφανίζεται μόνο η y'

ii) $y''' - (\sin^3 x)y = \cos^3 x$, είναι τρίτης τάξης γιατί εμφανίζεται η y'''

iii) $y^{(iv)} - xy^2 = \cos^4 x$, (iv) $y^{(iv)} - x^2 y = \cos^4 x$, είναι τετάρτης τάξης γιατί εμφανίζεται η $y^{(iv)}$

(v) $x(1-2xy)y' + (1+2xy)y = 0$, είναι πρώτης τάξης γιατί εμφανίζεται η y'

Ακόμη, μια Σ.Δ.Ε. λέμε ότι είναι γραμμική (βλ. και σελ. 9 –10 του ανωτέρω βιβλίου), αν τόσο η y όσο και όλες οι εμφανιζόμενες παράγωγοί της, εμπλέκονται στην διαφορική εξίσωση με γραμμικό τρόπο. Κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση:

i) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$, είναι γραμμική

ii) $y''' - (\sin^3 x)y = \cos^3 x$, είναι γραμμική

iii) $y^{(iv)} - xy^2 = \cos^4 x$, είναι μη γραμμική λόγω του όρου y^2

iv)) $y^{(iv)} - x^2 y = \cos^4 x$, είναι γραμμική

v) $x(1-2xy)y' + (1+2xy)y = 0$, είναι μη γραμμική λόγω των όρων y^2 και yy'

β) Η εξίσωση i) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$, είναι γραμμική πρώτης τάξης και η λύση της στο διάστημα (0, π/2) (όπου cosx και sinx είναι θετικά) δίνεται από την συνάρτηση

$$y(x) = e^{-\int \tan x dx}\left[c + \int \cos^2 x e^{\int \tan x dx} dx\right] = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[c + \int \cos^2 x e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} dx\right] =$$

$$= e^{\ln(\cos x)}\left[c + \int \cos^2 x e^{-\ln(\cos x)} dx\right] = \cos x\left[c + \int \cos^2 x \frac{1}{\cos x} dx\right] = \cos x[c + \sin x], \text{ όπου c αυθ. σταθ.}$$

γ) Η αντικατάσταση $u = 2xy$ ή $y = \dfrac{u}{2x}$ δίνει $y' = \dfrac{2xu' - 2u}{4x^2} = \dfrac{xu' - u}{2x^2}$. Οπότε από την (v) έχομε

$$x(1-u)y' + (1+u)y = x(1-u)\frac{xu' - u}{2x^2} + (1+u)\frac{u}{2x} = xu' - u - xuu' + u^2 + u + u^2 = 0,$$

η οποία ανάγεται στη ΣΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

$$x(u-1)\frac{du}{dx}=2u^2 \Rightarrow \frac{(u-1)du}{u^2}=\frac{2}{x}dx, \ \ x\neq 0, \ \ u\neq 0.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση κατά μέλη βρίσκομε

$$\int\frac{(u-1)du}{u^2}=\int\frac{2}{x}dx \Rightarrow \int\frac{1}{u}du-\int\frac{1}{u^2}dx=\int\frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln|u|+\frac{1}{u}=2\ln|x|+c_1 \Rightarrow$$

$$2\ln|x|-\ln|u|=\frac{1}{u}-c_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{x^2}{u}\right|=\frac{1}{u}-c_1 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{u}\right|=e^{-c_1}e^{\frac{1}{u}} \Rightarrow \frac{x^2}{u}=c_2e^{\frac{1}{u}}, \ x\neq 0, \ \ u\neq 0 \text{ και } c_2=\pm e^{-c_1}.$$

Επειδή $u=2xy$, τελικά βρίσκομε

$$y=Cxe^{-\frac{1}{2xy}}, \ x\neq 0, \ \ y\neq 0, \ \text{ όπου } \ C=\frac{1}{c_2} \ \text{ αυθαίρετη σταθερά.}$$

Η συνάρτηση $y=0$ που έχομε εξαιρέσει είναι **ιδιάζουσα λύση** της δοθείσας εξίσωσης.

Άσκηση 2. Να βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ. (Προβλήματος Αρχικών Τιμών):

$$y'(x)=-1+\sqrt{x+y(x)-3}, \ \ y(0)=4. \tag{1}$$

Υπόδειξη: Δείξτε ότι η δοθείσα εξίσωση ανάγεται σε μία Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές με την αντικατάσταση $u(x)=x+y(x)-3\geq 0$.

Λύση. Θέτομε $u(x)=x+y(x)-3\geq 0$ οπότε $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ και λόγω της (1)

$\frac{du}{dx}-1=-1+\sqrt{u}\Rightarrow\frac{du}{dx}=u^{1/2}\overset{u>0}{\Rightarrow}u^{-1/2}du=dx$, δηλαδή μία εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές.

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχομε

$$\int u^{-1/2}du=\int dx\Rightarrow 2u^{1/2}=x+c, \ \text{ όπου c αυθαίρετη σταθερά.} \tag{2}$$

Από την αρχική συνθήκη για x=0, y=4, οπότε u=0+4-3=1, δηλαδή c=2. Άρα η (2) δίνει:

$$\sqrt{x+y(x)-3}=\frac{x+2}{2}, \ \ x+2\geq 0, \ \text{οπότε} \ \ x+y(x)-3=\frac{x^2}{4}+x+1\Rightarrow y(x)=\frac{x^2}{4}+4, \ \ x\geq -2.$$

Η $u(x)=0$ την οποία εξαιρέσαμε πιο πάνω ικανοποιεί την δοθείσα διαφορική εξίσωση γιατί $u(x)=x+y(x)-3=0\Rightarrow y(x)=3-x$ είναι λύση της. Όμως η λύση $y(x)=3-x$ δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0)=4$ οπότε δεν αποτελεί λύση του Π.Α.Τ.

Άσκηση 3. α) Να εξετασθεί ποιες από τις κάτωθι Σ.Δ.Ε. είναι ομογενείς (όπου $y=y(x)$):

(i)$\left(3x^2+y\right)dx+3x^2dy=0$, (ii)$\left(x^2+y^2+1\right)dx+xydy=0$, (iii)$\left(y+\sqrt{y^2+x^2}\right)dx-xdy=0, \ x>0.$

β) Να βρεθεί η γενική λύση των εξισώσεων εκείνων που είναι ομογενείς.

Λύση. α) Κατ' αρχήν να επισημάνουμε ότι μια Σ.Δ.Ε. της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (*)$$

είναι ομογενής αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ομογενής **μηδενικού (και μόνο)** βαθμού. (Ή ισοδύναμα αν είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

αφού τότε η συνάρτηση g είναι ομογενής μηδενικού βαθμού). Αν η Σ.Δ.Ε. δίνεται στην μορφή

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (**)$$

τότε αυτή είναι ομογενής, αν οι συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι και οι δύο ομογενείς **του ίδιου βαθμού**. Φυσικά οι δύο αυτοί ορισμοί είναι ισοδύναμοι, δεδομένου ότι η (**) τίθεται στην μορφή (*) με $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, η οποία είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, δεδομένου ότι ο παρονομαστής και ο αριθμητής είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού.

(i) Έχουμε την ΣΔΕ: $(3x^2 + y)\,dx + 3x^2dy = 0$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $3x^2 + y$ δεν είναι ομογενής επομένως η (i) δεν είναι ομογενής Σ.Δ.Ε.

(ii) Ομοίως έχουμε την ΣΔΕ: $(x^2 + y^2 + 1)\,dx + xydy = 0$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x^2 + y^2 + 1$ δεν είναι ομογενής επομένως η (ii) δεν είναι ομογενής Σ.Δ.Ε.

(iii) Για την εξίσωση $\left(y + \sqrt{y^2 + x^2}\right)dx - xdy = 0,\ x > 0$ έχουμε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{y^2 + x^2}}{x} = f(x,y)$ και ισχύει $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda y + \sqrt{(\lambda y)^2 + (\lambda x)^2}}{\lambda x} = \lambda^0 f(x,y)$, δηλαδή η f είναι συνάρτηση ομογενής μηδενικού βαθμού, οπότε η (iii) είναι ομογενής Σ.Δ.Ε.

β) Προκειμένου να επιλύσουμε την (iii), η οποία είναι ομογενής, την γράφουμε στη μορφή,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}. \qquad (1)$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $\dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$, και η (1) ανάγεται σε Σ.Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών ως προς $u(x)$ και την λύνουμε:

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{u^2 + 1} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| = \ln|x| + c \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{u + \sqrt{u^2 + 1}}{x}\right| = c \Rightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} = Cx, \text{ όπου } C = \pm e^c \text{ αυθαίρετη σταθερά.}$$

Στην τελευταία σχέση θέτουμε $u = \dfrac{y}{x}$ και παίρνουμε τη γενική λύση της (iii) σε πεπλεγμένη μορφή: $\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} + 1} = Cx \Rightarrow y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$, όπου C αυθαίρετη σταθερά.

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$\left(Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2\right) dx + \left(\Delta x^2 + Exy + Zy^2\right) dy = 0, \text{ όπου } A, B, \Gamma, \Delta, E, Z \text{ σταθερές}, \quad (1)$$

είναι ακριβής (τέλεια, πλήρης) εάν και μόνον εάν Β=2Δ και Ε=2Γ. Στην περίπτωση αυτή (που είναι ακριβής) να βρεθεί η γενική λύση της (1) όταν Α=3, Γ=1, Δ=0 και Ζ=0.

Λύση: Η εξίσωση (1) θα είναι ακριβής εάν και μόνον εάν

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2\right)\cancel{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta x^2 + Exy + Zy^2\right), \text{ δηλαδή } Bx+2\Gamma y = 2\Delta x+Ey \Leftrightarrow B=2\Delta \text{ και } E=2\Gamma.$$

Για $\Delta=0 \Rightarrow B=0$ και $\Gamma=1 \Rightarrow E=2$, οπότε η (1) γίνεται

$$(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0 \qquad (2)$$

που είναι ακριβής και η γενική της λύση δίνεται από την σχέση:

$$\int_a^x (3t^2 + y^2)dt + \int 2aydy = c \Rightarrow x^3 + xy^2 - a^3 - ay^2 + ay^2 = c \qquad \text{ή}$$

$$x^3 + xy^2 = C, \quad \text{όπου} \quad C = c - a^3 \text{ αυθαίρετη σταθερά.} \qquad (3)$$

Η γενική λύση της (2) θα μπορούσε βέβαια να βρεθεί αν αναζητήσομε συνάρτηση f(x,y) τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x έχουμε $f(x, y) = x^3 + xy^2 + \varphi(y)$ και η παράγωγος αυτής ως προς y είναι $2xy + \varphi'(y)$ που, λόγω της δεύτερης, δίνει $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c_1$. Η γενική λύση τότε είναι $f(x, y) = c$ ή $f(x, y) = x^3 + xy^2 + c_1 = c$, δηλαδή $x^3 + xy^2 = C$, όπου $C = c - c_1$ αυθαίρετη σταθερά. (Το ίδιο αποτέλεσμα όπως στην (3)).

Άσκηση 5. α) Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για κάθε μία από τις κάτωθι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και να δειχθεί ότι ανάγονται σε ακριβείς $y = y(x)$:

$$\text{(i) } (4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0, \qquad \text{(ii) } ydx - (x - 2y)dy = 0.$$

β) Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την εξίσωση (v) της Άσκησης 1 α) και στη συνέχεια να βρείτε τη γενική της λύση.

Λύση: α) (i) Έχουμε την Σ.Δ.Ε. $(4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0, \qquad (1)$

η οποία είναι γραμμένη στην μορφή $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ με $P(x, y) = 4x + 3y^2$ και $Q(x, y) = 3xy$. Είναι: $P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 6y$ και $Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y$.

Η (1) δεν είναι ακριβής, αφού $P_y \neq Q_x$, οπότε θα αναζητήσουμε ολοκληρωτικό παράγοντα. Είναι,

$P_y - Q_x = 6y - 2y = 4y$ και $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{4y}{2xy} = \dfrac{2}{x} = f(x)$, συνάρτηση μόνο του x.

Άρα η (1) δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα (συνάρτηση μόνο του x) της μορφής (η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να ληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με μηδέν):

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2, \quad x \neq 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα x^2 και αυτή ανάγεται στην εξίσωση $(4x^3 + 3x^2y^2)dx + 2x^3ydy = 0$ για την οποία ισχύει $P_y = 6x^2y = Q_x$, δηλαδή είναι ακριβής.

(ii) Έχουμε την Σ.Δ.Ε. $ydx - (x-2y)dy = 0$ (2)

η οποία είναι γραμμένη στη μορφή $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ με $P(x,y) = y$ και $Q(x,y) = -(x-2y)$. Είναι, $P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$. Συνεπώς η (2) δεν είναι ακριβής.

Παρατηρούμε ότι $\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{1-(-1)}{-y} = -\frac{2}{y} = g(y)$, συνάρτηση μόνο του y.

Άρα η (2) δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα (συνάρτηση μόνο του y) της μορφής (η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να ληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με μηδέν):

$$\mu(y) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{-P}dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}, \quad y \neq 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η (2) ανάγεται στην εξίσωση $\frac{1}{y}dx - \frac{x-2y}{y^2}dy = 0$ για την οποία ισχύει $P_y = -\frac{1}{y^2} = Q_x$, δηλαδή είναι ακριβής.

β) Η εξίσωση (v) της Άσκησης 1 α) γράφεται ισοδύναμα

$$y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0, \qquad (3)$$

δηλαδή στη μορφή $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ με $P(x,y) = y(1+2xy)$ και $Q(x,y) = x(1-2xy)$. Είναι, $P_y = 1 + 4xy \neq Q_x = 1 - 4xy$. Συνεπώς η (2) δεν είναι ακριβής. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = \frac{8xy}{-4x^2y^2} = -\frac{2}{xy} = h(xy), \ x, y \neq 0, \text{ συνάρτηση του γινομένου xy.}$$

Άρα η (2) δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα (συνάρτηση μόνο του xy) της μορφής (η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να ληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ίση με μηδέν):

$$\mu(xy) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}d(xy)} = e^{-\int \frac{2}{xy}d(xy)} = e^{-2\ln|xy|} = \frac{1}{x^2y^2}, \quad x, y \neq 0.$$

Οπότε η (3) γίνεται, $$\frac{1+2xy}{x^2y}dx + \frac{1-2xy}{xy^2}dy = 0 \qquad (4)$$

για την οποία ισχύει $P_y = -\frac{1}{x^2y^2} = Q_x$, δηλαδή είναι ακριβής.

Η (4) είναι ακριβής και επομένως η γενική της λύση θα δίνεται από την σχέση (βλ. (11) σελ. 73):

$$\int_a^x \frac{1+2ty}{t^2y}\,dt + \int \frac{1-2ay}{ay^2}\,dy = c \quad ή$$

$$\int_a^x \frac{1}{t^2y}\,dt + 2\int_a^x \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{1}{ay^2}\,dy - \int \frac{2ay}{ay^2}\,dy \Rightarrow \frac{1}{y}\left[-\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=x} + 2\ln|t|\Big|_{t=a}^{t=x} - \frac{1}{ay} - 2\ln|y| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{ay} - \frac{1}{xy} + 2\ln|x| - 2\ln|a| - \frac{1}{ay} - 2\ln|y| \Rightarrow 2\ln|x| - 2\ln|y| = \frac{1}{xy} + 2\ln|a| + c \Rightarrow$$

$$2\ln\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{1}{xy} + c_2 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{1}{2xy} + c_3 \Rightarrow \frac{x}{y} = Ce^{\frac{1}{2xy}} \Rightarrow y = Cxe^{\frac{-1}{2xy}}, \quad x \neq 0, y \neq 0,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. (Το ίδιο αποτέλεσμα όπως και στην 1 (v)).

Η γενική λύση της (4) θα μπορούσε βέβαια να βρεθεί αν αναζητήσομε συνάρτηση f(x,y) τέτοια ώστε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1+2xy}{x^2y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1-2xy}{xy^2}$.

Οπότε ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x έχουμε

$$f(x,y) = \int \frac{1+2xy}{x^2y}\,dx = \int \frac{1}{x^2y}\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx = -\frac{1}{xy} + 2\ln|x| + \varphi(y)$$

και η παράγωγος αυτής ως προς y, λόγω της δεύτερης, δίνει

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{2}{y} \Rightarrow \varphi'(y) = -\frac{2}{y} \Rightarrow \varphi(y) = -2\ln|y|.$$

Η γενική λύση τώρα είναι $f(x,y) = c$ ή $f(x,y) = -\dfrac{1}{xy} + 2\ln|x| - 2\ln|y| = c$, δηλαδή

$$2\ln\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{1}{xy} + c \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{1}{2xy} + c_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = c_2e^{\frac{1}{2xy}} \Rightarrow y = Cxe^{\frac{-1}{2xy}}, \quad x \neq 0, y \neq 0,$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά. (Το ίδιο αποτέλεσμα όπως και παραπάνω).

Η συνάρτηση $y = 0$ που έχομε εξαιρέσει είναι **ιδιάζουσα λύση** της δοθείσας εξίσωσης.

Άσκηση 6. Να βρεθεί η γενική λύση της Σ.Δ.Ε.

$$y'\sqrt{y} - 2xy^{3/2} - 4xy = 0, \quad y = y(x) > 0. \qquad (1)$$

Υπόδειξη: Με κατάλληλες πράξεις η δοθείσα εξίσωση ανάγεται σε μία Δ.Ε. γνωστού τύπου.

Λύση: Διαιρώντας με $\sqrt{y} \neq 0$ η εξίσωση (1) ανάγεται στην

$$y' - 2xy = 4xy^{1/2}, \; y = y(x) > 0, \qquad (2)$$

η οποία είναι Δ.Ε. τύπου Bernoulli με $n = 1/2$ Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2) επί $y^{-1/2}$ και στη συνέχεια κάνοντας την αντικατάσταση $z = y^{1-n} = y^{1/2}$, όπου $z = z(x)$, αναγόμαστε στην εξίσωση $z' - xz = 2x$, η οποία είναι γραμμική διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης ως προς την $z = z(x)$ και της οποίας η γενική λύση δίνεται από τη συνάρτηση

$$z(x)=e^{\int x dx}\left[c+\int 2xe^{-\int x dx}\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left[c+\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left[c-2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]=ce^{\frac{x^2}{2}}-2,\text{ όπου c αυθ. σταθ.}$$

Επειδή $z=y^{1/2}$ η γενική λύση της δοθείσας Σ.Δ.Ε είναι $y^{\frac{1}{2}}=ce^{\frac{x^2}{2}}-2$, δηλαδή

$$y(x)=(ce^{\frac{x^2}{2}}-2)^2,\text{ όπου c αυθαίρετη σταθερά.}$$

Άσκηση 7. Προσδιορίστε την σταθερά k ώστε η συνάρτηση $y_1(x)=kx$ να αποτελεί μια μερική λύση της Σ.Δ.Ε. $\quad y'+8xy^2-4x(4x+1)y+(8x^3+4x^2-1)=0,\ y=y(x),\quad$ (1)

και στη συνέχεια βρείτε τη γενική της λύση.

Λύση:

Αναγνωρίζουμε ότι η δοθείσα εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση τύπου Riccati και για να βρούμε την γενική λύση της (1), αρκεί να γνωρίζουμε μια λύση αυτής. Μας δίνεται στην εκφώνηση ότι η (1) δέχεται λύση της μορφής $y_1(x)=kx$. Άρα θα κάνουμε αντικατάσταση της συνάρτησης $y=kx$ στην (1) και θα προσδιορίσουμε το k. Έχουμε $k+8xk^2x^2-16kx^3-4kx^2=-8x^3-4x^2+1$, δηλαδή $(8k^2-16k)x^3-4kx^2+k=-8x^3-4x^2+1$, απ' όπου προκύπτει $k=1$. Άρα μια λύση της (1) είναι η $y_1(x)=x,\ \ x\neq 0$. Ο μετασχηματισμός

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{u}=x+\frac{1}{u} \qquad (2)$$

όπου $u=u(x)$ νέα άγνωστη συνάρτηση, ανάγει την εξίσωση (1) σε μία γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης. Πράγματι από τη (2) έχουμε: $y'=1-\frac{u'}{u^2}$ και θέτοντας αυτήν καθώς και τη (2) στην (1) προκύπτει:

$$1-\frac{u'}{u^2}+8x\left(x^2+\frac{2x}{u}+\frac{1}{u^2}\right)-4x(4x+1)\left(x+\frac{1}{u}\right)+(8x^3+4x^2-1)=0\Rightarrow$$

$$u^2-u'+8x^3u^2+16x^2u+8x-4x(4x+1)xu^2-4x(4x+1)u+(8x^3+4x^2-1)u^2=0\Rightarrow u'+4xu=8x.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης ως προς u της οποίας η γενική λύση δίνεται από τη συνάρτηση:

$$u(x)=e^{-\int 4x dx}\left[c+\int 8xe^{\int 4x dx}dx\right]=e^{-2x^2}\left[c+\int 8xe^{2x^2}dx\right]=e^{-2x^2}\left[c+2e^{2x^2}\right]=ce^{-2x^2}+2.$$

Τελικά,

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{u(x)}=x+\frac{1}{ce^{-2x^2}+2}\Rightarrow y(x)=x+\frac{e^{2x^2}}{2e^{2x^2}+c},\text{ όπου c αυθαίρετη σταθερά,}$$

που είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1).

Άσκηση 8.

Ένα σώμα του οποίου η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι $\theta_0 = 80^o$, τοποθετείται μέσα σε υγρό σταθερής θερμοκρασίας $\theta_\pi = 20^o$. Αν η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,\text{min}$ μειώνεται στους 60^o βαθμούς να βρεθεί η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 30\,\text{min}$ και γενικά η θερμοκρασία του σώματος ανά πάσα χρονική στιγμή t.

Υπόδειξη: Να λάβετε ως δεδομένο ότι για τη ψύξη ενός σώματος μέσα σε περιβάλλον θερμοκρασίας θ_π ισχύει ο νόμος ψύξης του Νεύτωνα

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_\pi), \quad \text{όπου} \quad k \quad \text{σταθερά}, \qquad (1)$$

και θ=θ(t) η θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

Λύση: Η Δ.Ε. (1) είναι με χωριζόμενες μεταβλητές καθόσον γράφεται: $\dfrac{d\theta}{\theta - \theta_\pi} = -kdt, \ \ \theta > \theta_\pi$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη βρίσκομε: $\ln(\theta - \theta_\pi) = -kt + c, \ \ \theta > \theta_\pi$, από όπου προκύπτει

$$\theta - \theta_\pi = e^c e^{-kt} \Rightarrow \theta(t) = \theta_\pi + e^c e^{-kt}. \qquad (2)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχομε ότι για $t_0 = 0, \ \ \theta_0 = 80^o$, οπότε η (2) δίνει:

$80 = 20 + e^c e^{-k0} = 20 + e^c \Rightarrow e^c = 60$ ή $c = \ln 60$. Άρα η (2) γίνεται:

$$\theta(t) = 20 + 60e^{-kt}. \qquad (3)$$

Επειδή τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,\text{min}$, η θερμοκρασία μειώνεται στους 60^o, η (3) δίνει:

$$60 = 20 + 60e^{-5k} \Rightarrow e^{-5k} = \frac{2}{3} \ \ \text{ή} \ \ -5k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Τώρα τη χρονική στιγμή $t_2 = 30\,\text{min}$ θα είναι

$$\theta(30) = 20 + 60e^{-30k} = 20 + 60(e^{-5k})^6 = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 25{,}2675^O$$

Γενικά η θερμοκρασία θ(t) ανά πάσα χρονική στιγμή δίνεται από την (3), όπου $k = -\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$.